

Функцияның экстремумдары — есептер жинағы

I. Қысқаша теория (есіңізге салу)

- Стационар нүкте: $f'(x) = 0$ немесе туынды анықталмаса.
 - Локалдық экстремум болу үшін стационар нүкте қажет, бірақ жеткілікті емес.
 - Екінші туынды тесті: егер $f'(c) = 0$ және $f''(c) > 0$ болса — локалдық минимум; $f''(c) < 0$ болса — локалдық максимум; $f''(c) = 0$ болса тест шешімсіз болуы мүмкін.
 - Глобалдық (жалпы) экстремумдарды жабық аралықта f үздіксіз болса стационар нүктелер мен шеттерден тексеру қажет.
 - Шартты экстремумдар (constraint extrema): Lagrange әдісі — $\nabla f = \lambda \nabla g$.
-

II. Негізгі деңгей (таңдау/тексеру)

1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
 - а) Стационар нүктені табыңдар.
 - б) Локалдық экстремумды анықтаңдар (типін көрсетіңдер).
 - в) Глобалдық минимумы бар ма?
 2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
 - а) $f'(x)$ -ті табыңдар, стационар нүктелерді анықтаңдар.
 - б) Әр стационар нүктеде максимум/минимум/седлова нүкте ме — тексеріңдер.
 3. $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ (барлық $\mathbb{R}$ бойынша).
 - а) Стационар нүктелер теңдеуін жазып, алғашқы бірнеше шешімді табыңдар (фармацияда жуықтап).
 - б) Сол нүктелердің түрін анықтаңдар.
 4. $f(x) = \ln x - x, x > 0$.
 - а) Стационар нүктені анықтаңдар.
 - б) Ол жерде локалдық максимум/минимум бар ма? Глобалдық ма?
 5. $f(x) = |x| + x$.
 - а) Стационар нүктелерді талдаңдар (туынды бөлшектерін қарастырып).
 - б) Экстремум бар ма?
-

III. Орташа деңгей (жабық аралық, шет нүктелер)

6. Табыңдар extrema-ларды: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ аралықта $[0, 4]$. (стационар нүктелер + шеттерді тексеру)
7. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ аралықта $[-2, 2]$ локалдық және глобалдық экстремумдарды тап.
8. $f(x) = \sqrt{x}$ аралықта $[0, 4]$: экстремумдар бар ма? (туынды арқылы тексеріңіз)
9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ аралықта $[-2, 2]$ глобалдық максимум мен минимумды табыңдар.
10. $f(x) = \cos x$ аралықта $[0, 2\pi]$: барлық локалдық және глобалдық экстремумдарды көрсетіңіз.

IV. Жоғары деңгей (екінші туындысы нөл болатын жағдайлар, көп реттік түйіндер)

11. $f(x) = x^4$.
 - а) $x = 0$ нүктесін стационар ретінде қарастырыңыз.
 - б) Екінші туынды тесті не айтады? Шешіңіз және $x = 0$ -тің түрін анықтаңыз.
 12. $f(x) = x^5 - 5x^3$. Стационар нүктелерді тауып, жоғары реттік туынды көмегімен олардың түрін анықтаңыз.
 13. $f(x) = x^4 - 4x^2$. Стационар нүктелер мен экстремумдар кестесін құрыңыз (теңдеулерді шешу, екінші туынды тексеру).
-

V. Шартты экстремумдар (Lagrange multipliers)

14. Табыңдар максимум мен минимум: $f(x, y) = x^2 + y^2$ шектеу бойынша $x + y = 1$. (Lagrange қолдану)
 15. $f(x, y) = xy$ шектеу $x^2 + y^2 = 1$. (шартты экстремумдар — шеңбердегі максимум/минимум)
 16. $f(x, y) = x^3 + y^3$ шектеу $x + y = 1$. Табылсын шартты экстремумдар.
 17. Экстремумды табыңдар: $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, шектеу $x^2 + y^2 = 1$.
-

VI. Параметрлік, имплицитті және көп айнымалы функциялар

18. Параметрлік қисық: $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$. Қай t -ларда $y(x)$ экстремумдары бар? (dy/dx арқылы талдаңыз)
 19. Имплицитті анықталған функция: $x^2 + xy + y^2 = 3$. Шектеулі $y(x)$ үшін экстремумдар бар ма — имплицитті туынды арқылы талдаңыз (жергілікті максимум/минимум).
 20. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Глобалдық минимум бар ма? Қай нүктеде?
-

VII. Қолданбалы/физикалық есептер

21. Қысқа: Бір бейтаныс функция f жақсырақ анықталады: өндірістің табысы $R(x) = 100x - x^2$. Өнім санын x өзгерте отырып пайда максимумы қайда болады? (локалдық/глобалдық)
22. Жолдың биіктігі $h(x) = -0.5x^2 + 4x$. Қай жерде биіктік максимумы болады, және ол қандай мән?
23. Экономика: шығын функциясы $C(q) = 50 + 5q + 0.1q^2$. Табылатын мақсаты — пайда $P(q) = R(q) - C(q)$ максимизация — егер $R(q) = 20q$. Қанша өндіріс пайдалы?

VIII. Қиындығы жоғары (дәлелдеу, аналитикалық қасиеттер)

24. Дәлелдеңіз: егер f екі рет дифференциалданатын және $f''(x) > 0$ барлық x болса, f дәреже бойынша жуықтап глобалдық минимумы болмайды деген жоқ — бірақ локалдық мін. (Нұсқаулық: $f'' > 0$ локалдық конвексностьты көрсетеді.)
25. Көрсетіңіз мысал: $f'(x) = 0$ барлық x үшін болмайтын функция, бірақ жергілікті экстремум жоқ. (мысал табыңыз және түсіндіріңіз)
26. Дәлелдеңіз: экстремум табу үшін $f'(c) = 0$ шарттың кері мағынасы жоқ — мысал келтіріңіз (мысалы, $f(x) = x^3$ пен $f(0) = 0$ — стационар нүкте, бірақ экстремум емес).
-

IX. Емтиханға дайындық — жылдам тапсырмалар (шапшаң)

27. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Стационар нүктелерді табыңыз.
28. $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ ($x > 0$). Стационар нүкте және оның түрін табыңдар.
29. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Глобалдық максимум/минимум бар ма? (бар болса тап)
30. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$. Глобалдық минимумды табыңдар (нүктені және мәнін).
-

X. Қосымша (тәжірибе, график)

31. Таңдап алыңыз бір жоғары дәрежелі полином (мысалы $x^4 - 4x^3 + 6x^2$). Графигін салып, барлық стационар нүктелер мен экстремумдарды табыңыз.
32. Берілген $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$. $x = 0$ -де экстремум бар ма? Неліктен?